Premiers algorithmes numériques

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Louis-Le-Grand

Égalité entre nombres flottants

Parler d'égalité entre nombres flottants n'a en général pas de sens : leur manipulation engendre des erreurs intrinsèques à leur définition.

- erreur lors d'une conversion décimal $\longrightarrow$ flottant ;
- erreur lors d'une opération arithmétique.

Une égalité `x == y` n'a en général aucun sens entre nombres flottants.

Égalité entre nombres flottants

Parler d'égalité entre nombres flottants n'a en général pas de sens : leur manipulation engendre des erreurs intrinsèques à leur définition.

- erreur lors d'une conversion décimal $\longrightarrow$ flottant ;
- erreur lors d'une opération arithmétique.

Une égalité `x == y` n'a en général aucun sens entre nombres flottants.

- choisir une tolérance absolue consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

Inconvénient : une valeur choisie dans l'absolu parce qu'elle nous parait petite peut se révéler trop grande lorsque les nombres à comparer sont eux-même très petits ou trop petite lorsque les nombres sont très grands.

Égalité entre nombres flottants

Parler d'égalité entre nombres flottants n'a en général pas de sens : leur manipulation engendre des erreurs intrinsèques à leur définition.

- erreur lors d'une conversion décimal $\longrightarrow$ flottant ;
- erreur lors d'une opération arithmétique.

Une égalité `x == y` n'a en général aucun sens entre nombres flottants.

- choisir une tolérance absolue consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
- choisir une tolérance relative consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon|y|$.

Ce choix présente aussi des inconvénients :

- la relation n'est pas symétrique ;
- la relation présente un défaut majeur lorsque x et y sont de signes opposés : si $y = -x$ cette relation n'est jamais vérifiée.

Égalité entre nombres flottants

Parler d'égalité entre nombres flottants n'a en général pas de sens : leur manipulation engendre des erreurs intrinsèques à leur définition.

- erreur lors d'une conversion décimal $\longrightarrow$ flottant ;
- erreur lors d'une opération arithmétique.

Une égalité `x == y` n'a en général aucun sens entre nombres flottants.

- choisir une tolérance absolue consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.
- choisir une tolérance relative consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon |y|$.

Dans le module NUMPY la fonction `isclose(x, y)` renvoie la valeur `True` dès lors que $|x - y| \leqslant \varepsilon_a + \varepsilon_r |y|$.

Égalité entre nombres flottants

Parler d'égalité entre nombres flottants n'a en général pas de sens : leur manipulation engendre des erreurs intrinsèques à leur définition.

- erreur lors d'une conversion décimal $\longrightarrow$ flottant ;
- erreur lors d'une opération arithmétique.

Une égalité `x == y` n'a en général aucun sens entre nombres flottants.

- choisir une tolérance absolue consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x-y| \leqslant \varepsilon$.
- choisir une tolérance relative consiste à fixer $\varepsilon > 0$ et à convenir que x et y sont proches dès lors que $|x-y| \leqslant \varepsilon|y|$.

Dans le module NUMPY la fonction `isclose(x, y)` renvoie la valeur `True` dès lors que $|x-y| \leqslant \varepsilon_a + \varepsilon_r|y|$.
Dans le module MATH (à partir de la version 3.5 de PYTHON) la fonction `isclose(x, y)` renvoie la valeur `True` dès lors que

$$|x-y| \leqslant \varepsilon_a + \varepsilon_r \max(|x|, |y|).$$

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

```
def solve(a, b, c):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < 0:
        print("pas de solution")
    elif delta > 0:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

```
def solve(a, b, c):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < 0:
        print("pas de solution")
    elif delta > 0:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

Dans les deux cas le discriminant est nul et pourtant :

```
>>> solve(0.01, 0.2, 1)
deux racines simples -10.000000131708903 et -9.999999868291098
>>> solve(0.011025, 0.21, 1)
pas de solution
```

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

```
def solve(a, b, c):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < 0:
        print("pas de solution")
    elif delta > 0:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

Explication :

```
>>> .2 * .2 - 4 * .01 * 1
6.938893903907228e-18
>>> .21 * .21 - 4 * .011025 * 1
-6.938893903907228e-18
```

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac$ est petit devant b^2 les deux racines sont quasiment confondues.

$\longrightarrow$ on remplace la condition $\Delta = 0$ par la condition $|\Delta| \ll b^2$.

```python
def solve2(a, b, c, epsilon=2**(-52)):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < -epsilon*b**2:
        print("pas de solution")
    elif delta > epsilon*b**2:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac$ est petit devant b^2 les deux racines sont quasiment confondues.

$\longrightarrow$ on remplace la condition $\Delta = 0$ par la condition $|\Delta| \ll b^2$.

```python
def solve2(a, b, c, epsilon=2**(-52)):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < -epsilon*b**2:
        print("pas de solution")
    elif delta > epsilon*b**2:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

```
>>> solve2(0.01, 0.2, 1)
une racine double -10.0
>>> solve2(0.011025, 0.21, 1)
une racine double -9.523809523809524
```

Égalité entre nombres flottants

Résolution d'une équation du second degré

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac$ est petit devant b^2 les deux racines sont quasiment confondues.

$\longrightarrow$ on remplace la condition $\Delta = 0$ par la condition $|\Delta| \ll b^2$.

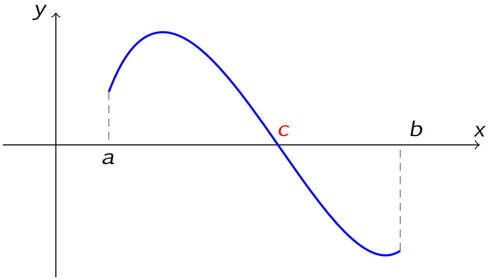
```
def solve2(a, b, c, epsilon=2**(-52)):
    delta = b * b - 4 * a * c
    if delta < -epsilon*b**2:
        print("pas de solution")
    elif delta > epsilon*b**2:
        x, y = (-b-sqrt(delta))/2/a, (-b+sqrt(delta))/2/a
        print("deux racines simples {} et {}".format(x, y))
    else:
        x = -b/2/a
        print("une racine double {}".format(x))
```

Pourquoi $2^{-52} \approx 2 \cdot 10^{-16}$? $\longrightarrow$ il s'agit de l'epsilon numérique :

```
>>> 1 + 2**-52 == 1
False
>>> 1 + 2**-53 == 1
True
```

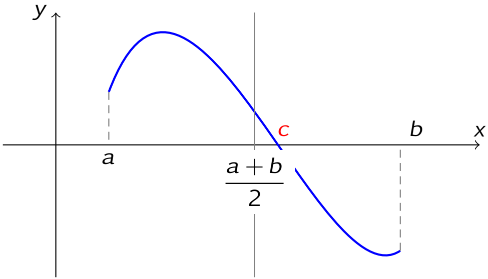
Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.



Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

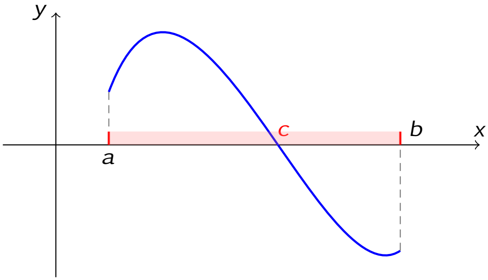


Suivant le signe de $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$ l'une des deux relations est vérifiée :

$$f(a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)f(b) \leqslant 0.$$

Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

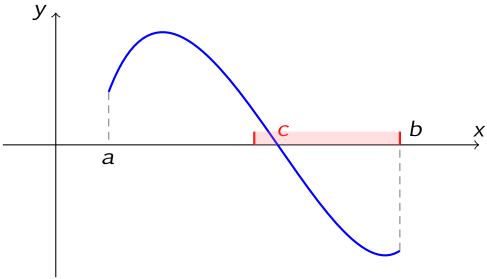


On itère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et la relation :

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (u_n, m) & \text{si } f(u_n)f(m) \leqslant 0 \\ (m, v_n) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } m = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

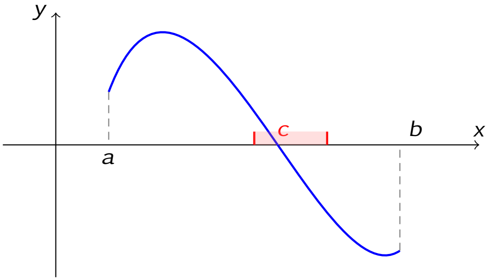


On itère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et la relation :

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (u_n, m) & \text{si } f(u_n)f(m) \leqslant 0 \\ (m, v_n) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } m = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

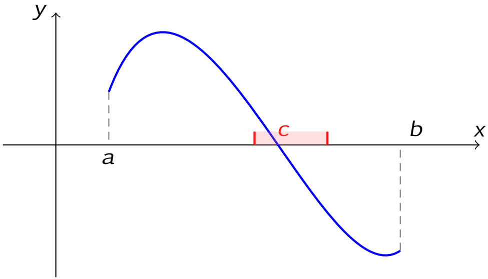


On itère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et la relation :

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (u_n, m) & \text{si } f(u_n)f(m) \leqslant 0 \\ (m, v_n) & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } m = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

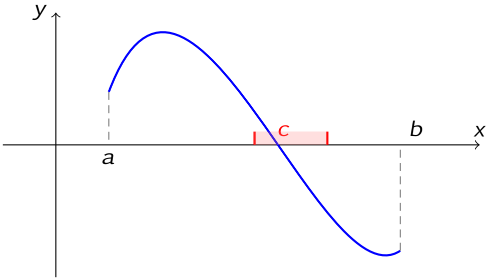


Validité : $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n)f(v_n) \leqslant 0$.

Terminaison : lorsque $v_n - u_n \leqslant 2\varepsilon$ il existe une racine c de f vérifiant : $|w_n - c| \leqslant \varepsilon$ avec $w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Recherche d'une racine par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$.



Coût : $v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ et $\dfrac{b-a}{2^n} \leqslant 2\varepsilon \iff n \geqslant \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$.

Si $\varepsilon = 10^{-p}$ l'algorithme se termine lorsque :

$$n \geqslant \log_2(b-a) + p\log_2(10) - 1 = \mathrm{O}(p).$$

Mise en œuvre pratique

```python
def dicho(f, a, b, epsilon=1e-12):
    if f(a) * f(b) > 0:
        return None
    u, v = a, b
    while abs(v - u) > 2 * epsilon:
        w = (u + v) / 2
        if f(u) * f(w) <= 0:
            v = w
        else:
            u = w
    return (u + v) / 2
```

Mise en œuvre pratique

```python
def dicho(f, a, b, epsilon=1e-12):
    if f(a) * f(b) > 0:
        return None
    u, v = a, b
    while abs(v - u) > 2 * epsilon:
        w = (u + v) / 2
        if f(u) * f(w) <= 0:
            v = w
        else:
            u = w
    return (u + v) / 2
```

Quelques exemples :

```python
>>> from numpy import sin

>>> dicho(sin, 3, 4)
3.141592653589214

>>> dicho(lambda x: x * x - 2, 1, 2)
1.414213562372424З
```

Mise en œuvre pratique

Utilisation du module scipy

La fonction bisect du module scipy.optimize réalise une recherche dichotomique.

```
bisect(f, a, b, xtol=1e-12, maxiter=100)
    Find root of a function within an interval.

    Basic bisection routine to find a zero of the function f between the
    arguments a and b. f(a) and f(b) can not have the same signs.
    Slow but sure.

    Parameters
    ----------
    f : function
        Python function returning a number.  f must be continuous, and
        f(a) and f(b) must have opposite signs.
    a : number
        One end of the bracketing interval [a,b].
    b : number
        The other end of the bracketing interval [a,b].
    xtol : number, optional
        The routine converges when a root is known to lie within xtol of the
        value return. Should be >= 0.
    maxiter : number, optional
        if convergence is not achieved in maxiter iterations, and error is
        raised.  Must be >= 0.

    Returns
    -------
    x0 : float
        Zero of f between a and b.
```

Mise en œuvre pratique

Utilisation du module scipy

La fonction bisect du module scipy.optimize réalise une recherche dichotomique.
On peut ajouter à notre fonction un nombre maximal d'itérations avant d'aboutir à un échec :

```
def dicho(f, a, b, epsilon=1e−12, maxiter=100):
    if f(a) * f(b) > 0:
        return None
    n = 0
    u, v = a, b
    while abs(v − u) > 2 * epsilon:
        n += 1
        if n > maxiter:
            chn = 'Échec après {} itérations.'.format(maxiter)
            raise RuntimeError(chn)
        w = (u + v) / 2
        if f(u) * f(w) <= 0:
            v = w
        else:
            u = w
    return (u + v) / 2
```

Valeur approchée d'une intégrale

Méthodes de quadrature

On approche la valeur de l'intégrale :

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$$

par une somme pondérée finie de valeurs de f en des points choisis :

$$I_{u,v}^p(f) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i f(x_i)$$

Les points x_i sont les nœuds, les coefficients α_i les poids.

Valeur approchée d'une intégrale

Méthodes de quadrature

On approche la valeur de l'intégrale :

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$$

par une somme pondérée finie de valeurs de f en des points choisis :

$$I_{u,v}^p(f) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i f(x_i)$$

Les points x_i sont les nœuds, les coefficients α_i les poids.
L'erreur de quadrature est la quantité :

$$E_{u,v}(f) = I_{u,v}(f) - I_{u,v}^p(f).$$

Une méthode de quadrature est d'ordre k quand l'erreur commise est nulle lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Valeur approchée d'une intégrale

Méthodes composites

Les méthodes de quadratures composites pour calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

subdivisent l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles $a = u_0 < \cdots < u_n = b$ et à appliquer une méthode de quadrature sur chacun des intervalles $[u_i, u_{i+1}]$. Dans ce cas, l'erreur commise est égale à :

$$\mathscr{E}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{u_i,u_{i+1}}(f)$$

Valeur approchée d'une intégrale

Méthodes composites

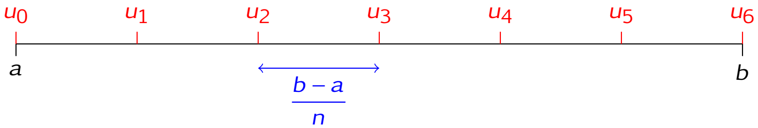
Les méthodes de quadratures composites pour calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

subdivisent l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $a = u_0 < \cdots < u_n = b$ et à appliquer une méthode de quadrature sur chacun des intervalles $[u_i, u_{i+1}]$. Dans ce cas, l'erreur commise est égale à :

$$\mathscr{E}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{u_i,u_{i+1}}(f)$$

On gardera en mémoire l'expression d'une subdivision de pas régulier : $u_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n$.



Valeur approchée d'une intégrale

Méthodes composites

Les méthodes de quadratures composites pour calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

subdivisent l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $a = u_0 < \cdots < u_n = b$ et à appliquer une méthode de quadrature sur chacun des intervalles $[u_i, u_{i+1}]$. Dans ce cas, l'erreur commise est égale à :

$$\mathscr{E}_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{u_i, u_{i+1}}(f)$$

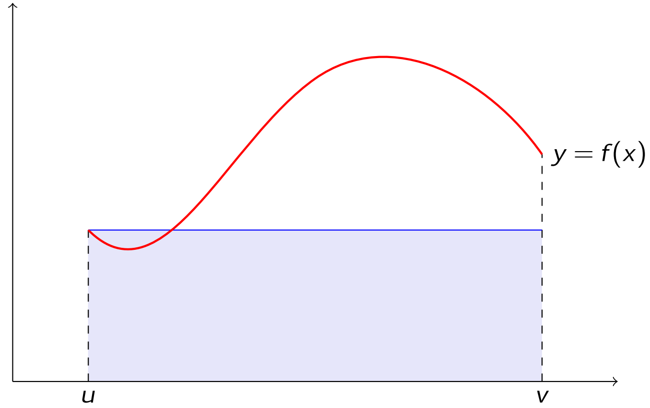
On rappelle (ou on admet) le :

Théorème de Rolle

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $g(a) = g(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u, v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v - u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(u)$.



Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u,v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v-u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(u)$.

La méthode du rectangle est d'ordre 0, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(v-u)^2}{2}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[u,v]$.

Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u,v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v - u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(u)$.

La méthode du rectangle est d'ordre 0, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(v-u)^2}{2}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[u,v]$.

Si $f = \lambda$ alors :

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v \lambda \,\mathrm{d}t = \lambda(v-u) = (v-u)f(u) = I^0_{u,v}(f)$$

ce qui montre que la méthode des rectangles est d'ordre 0.

Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u,v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v-u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(u)$.

La méthode du rectangle est d'ordre 0, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(v-u)^2}{2}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur commise vaut :

$$|E_{u,v}(f)| = \Big|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(u)\Big| = \Big|\int_u^v \big(f(t)-f(u)\big)\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_u^v |f(t)-f(u)|\,\mathrm{d}t.$$

Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u, v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v - u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v - u)f(u)$.

La méthode du rectangle est d'ordre 0, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(v-u)^2}{2}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[u, v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur commise vaut :

$$|E_{u,v}(f)| = \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(u)\right| = \left|\int_u^v \big(f(t) - f(u)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v |f(t) - f(u)|\,\mathrm{d}t.$$

Inégalité des accroissements finis : $|f(t) - f(u)| \leqslant M_1 |t - u|$ donc :

$$|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \int_u^v (t-u)\,\mathrm{d}t = M_1 \frac{(v-u)^2}{2}.$$

Méthode du rectangle

On approche f par la valeur qu'elle prend en un point de l'intervalle $[u,v]$. Si on choisit pour unique nœud $x_0 = u$ et pour poids $\alpha_0 = v-u$, ceci conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(u)$.

La méthode du rectangle est d'ordre 0, et si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(v-u)^2}{2}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur commise vaut :

$$|E_{u,v}(f)| = \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(u)\right| = \left|\int_u^v \big(f(t)-f(u)\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v |f(t)-f(u)|\,\mathrm{d}t.$$

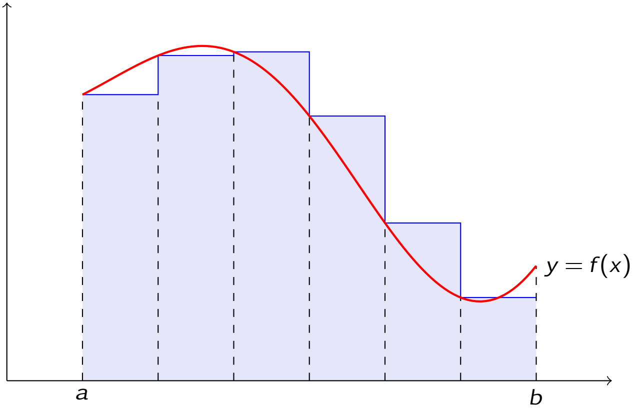
Soit $g : x \mapsto f(x) - f(u) - K(x-u)$ avec K choisi de sorte que $g(t) = 0$.
g est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $g(u) = g(t) = 0$ donc (Rolle) il existe $c \in]u,t[$ tel que $g'(c) = 0 \iff K = f'(c)$.
On a $f(t) - f(u) = f'(c)(t-u)$ donc $|f(t)-f(u)| \leqslant M_1(t-u)$ et :

$$|E_{u,v}(f)| \leqslant M_1 \int_u^v (t-u)\,\mathrm{d}t = M_1 \frac{(v-u)^2}{2}.$$

Méthode du rectangle

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par : $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\Big).}$



Méthode du rectangle

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par : $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\Big).}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur vérifie : $|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[a,b]$.

Méthode du rectangle

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par : $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\Big).}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur vérifie : $|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_1\,\dfrac{(b-a)^2}{2n}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[a,b]$.

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |E_{u_k,u_{k+1}}(f)| \text{ avec } |E_{u_k,u_{k+1}}(f)| \leqslant M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n^2} \text{ donc :}$$

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Méthode du rectangle

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par : $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\Big).}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur vérifie : $|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n}$ où M_1 majore $|f'|$ sur $[a,b]$.

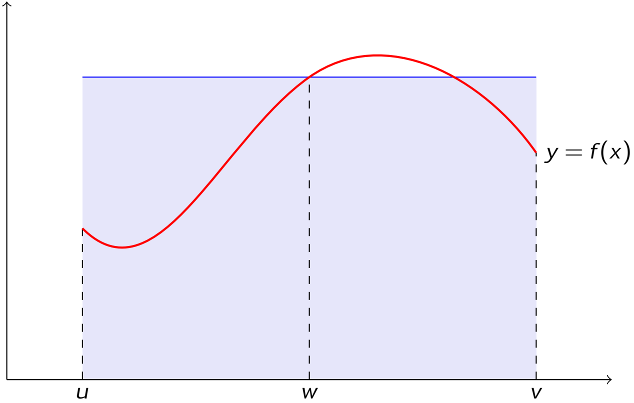
$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |E_{u_k,u_{k+1}}(f)|$ avec $|E_{u_k,u_{k+1}}(f)| \leqslant M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n^2}$ donc :

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{E}_n(f) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.



Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si $f(x) = ax+b$ on calcule :

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v (at+b)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}(v^2-u^2) + b(v-u) = (v-u)\Big(a\frac{u+v}{2} + b\Big) = I^0_{u,v}(f).$$

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u, v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(w) = \int_u^v \Big(f(t) - f(w) - (t-w)f'(w)\Big)\mathrm{d}t.$$

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(w) = \int_u^v \Big(f(t) - f(w) - (t-w)f'(w)\Big)\mathrm{d}t.$$

Soit $g : x \mapsto f(x) - f(w) - (t-w)f'(w) - K\dfrac{(x-w)^2}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(w) = \int_u^v \Big(f(t) - f(w) - (t-w)f'(w)\Big)\mathrm{d}t.$$

Soit $g : x \mapsto f(x) - f(w) - (t-w)f'(w) - K\dfrac{(x-w)^2}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(w) = g(t) = 0$ donc (Rolle) il existe $c_1 \in \,]w,t[$ tel que $g'(c_1) = 0$.

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(w) = \int_u^v \Big(f(t) - f(w) - (t-w)f'(w)\Big)\mathrm{d}t.$$

Soit $g : x \mapsto f(x) - f(w) - (t-w)f'(w) - K\dfrac{(x-w)^2}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(w) = g(t) = 0$ donc (Rolle) il existe $c_1 \in]w,t[$ tel que $g'(c_1) = 0$.
$g'(w) = 0$ donc (Rolle) $\exists c_2 \in]w,c_1[$ tel que $g''(c_2) = 0 \iff f''(c_2) - K = 0$.

Méthode du point milieu

On choisit pour unique nœud $x_0 = (u+v)/2 = w$ et pour poids $\alpha_0 = (v-u)$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)f(w)$.

La méthode du point milieu est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{24}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u, v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t - (v-u)f(w) = \int_u^v \Big(f(t) - f(w) - (t-w)f'(w)\Big)\mathrm{d}t.$$

Soit $g : x \mapsto f(x) - f(w) - (t-w)f'(w) - K\dfrac{(x-w)^2}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.

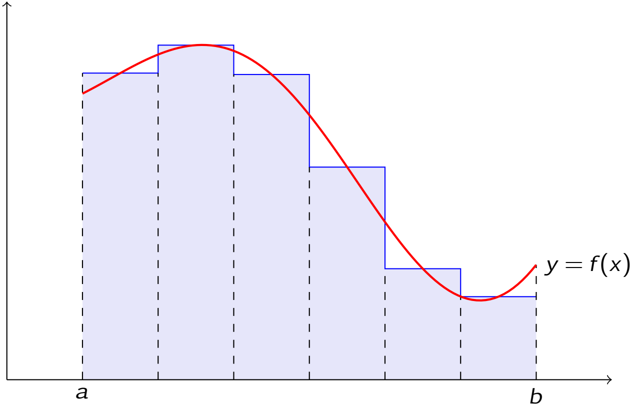
Ainsi, $g(t) = 0 \iff f(t) - f(w) - (t-w)f'(w) = f''(c_2)\dfrac{(t-w)^2}{2}$ ce qui implique :

$$|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \int_u^v \frac{(t-w)^2}{2}\,\mathrm{d}t = M_2\frac{(v-u)^3}{24}.$$

Méthode du point milieu

Méthode composite

On approche f par $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\Big).}$



Méthode du point milieu

Méthode composite

On approche f par $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\Big).}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de la méthode du point milieu composite vérifie :

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_2\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

où M_2 est un majorant de $|f''|$ sur $[a,b]$.

Méthode du point milieu

Méthode composite

On approche f par $\boxed{\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\Big).}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de la méthode du point milieu composite vérifie :

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

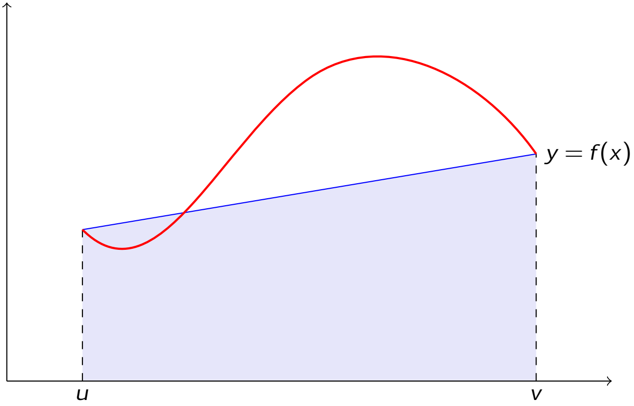
où M_2 est un majorant de $|f''|$ sur $[a,b]$.

$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |E_{u_k,u_{k+1}}(f)|$ avec $|E_{u_k,u_{k+1}}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(b-a)^3}{24n^3}$ donc

$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.



Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2\dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 alors $I_{u,v}(f) = I^1_{u,v}(f)$; la méthode est bien d'ordre 1.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vaut : $E_{u,v}(f) = \displaystyle\int_u^v (f(t) - \tilde{f}(t))\,\mathrm{d}t$.
avec $\deg \tilde{f} = 1$ et $\tilde{f}(u) = f(u), \tilde{f}(v) = f(v)$.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u, v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vaut : $E_{u,v}(f) = \displaystyle\int_u^v \big(f(t) - \tilde{f}(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

avec $\deg \tilde{f} = 1$ et $\tilde{f}(u) = f(u)$, $\tilde{f}(v) = f(v)$.

Soit $g : x \mapsto f(x) - \tilde{f}(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vaut : $E_{u,v}(f) = \displaystyle\int_u^v (f(t) - \tilde{f}(t))\,\mathrm{d}t$.
avec $\deg \tilde{f} = 1$ et $\tilde{f}(u) = f(u)$, $\tilde{f}(v) = f(v)$.
Soit $g : x \mapsto f(x) - \tilde{f}(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(u) = g(t) = g(v) = 0$ donc (Rolle) il existe $c_1 \in]u,t[$ et $c_2 \in]t,v[$ tels que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \dfrac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \dfrac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vaut : $E_{u,v}(f) = \displaystyle\int_u^v \big(f(t) - \tilde{f}(t)\big)\mathrm{d}t$.
avec $\deg \tilde{f} = 1$ et $\tilde{f}(u) = f(u)$, $\tilde{f}(v) = f(v)$.
Soit $g : x \mapsto f(x) - \tilde{f}(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(u) = g(t) = g(v) = 0$ donc (Rolle) il existe $c_1 \in]u,t[$ et $c_2 \in]t,v[$ tels que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$.
Il existe $c_3 \in]c_1,c_2[$ tel que $g''(c_3) = 0$. Et $g''(x) = f''(x) - K$ donc $K = f''(c_3)$.

Méthode du trapèze

On choisit pour nœuds $x_0 = u$ et $x_1 = v$ et pour poids $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{v-u}{2}$, ce qui conduit à approcher $I_{u,v}(f)$ par : $I^0_{u,v}(f) = (v-u)\frac{f(u)+f(v)}{2}$.

La méthode du trapèze est d'ordre 1, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \frac{(v-u)^3}{12}$ où M_2 majore $|f''|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de quadrature vaut : $E_{u,v}(f) = \displaystyle\int_u^v \big(f(t) - \tilde{f}(t)\big)\mathrm{d}t$.

avec $\deg \tilde{f} = 1$ et $\tilde{f}(u) = f(u)$, $\tilde{f}(v) = f(v)$.

Soit $g : x \mapsto f(x) - \tilde{f}(x) - K\frac{(x-v)(x-u)}{2}$ avec K tel que $g(t) = 0$.

Ainsi, $g(t) = 0 \iff f(t) - \tilde{f}(t) = f''(c_3)\frac{(t-v)(t-u)}{2}$ ce qui implique :

$$|E_{u,v}(f)| \leqslant M_2 \int_u^v \frac{(v-t)(t-u)}{2}\,\mathrm{d}t = M_2\frac{(v-u)^3}{12}.$$

Méthode du trapèze

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big) + \frac{b-a}{n} \times \frac{f(b)-f(a)}{2}.}$$

Méthode du trapèze

Méthode composite

On approche $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big) + \frac{b-a}{n} \times \frac{f(b)-f(a)}{2}.}$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, l'erreur de la méthode du trapèze composite vérifie :

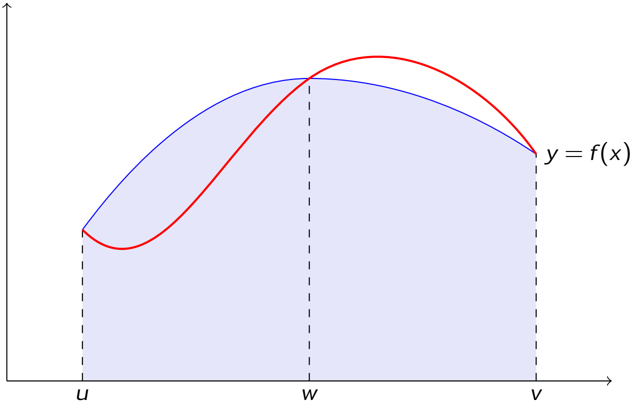
$$|\mathscr{E}_n(f)| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

où M_2 majore $|f''|$ sur $[a,b]$.

Méthode de Simpson

Interpolation de Lagrange : il existe une unique fonction polynomiale $\tilde{f}$ de degré $\leqslant 2$ tel que :

$$\tilde{f}(u) = f(u), \quad \tilde{f}(v) = f(v), \quad \tilde{f}(w) = f(w) \qquad \text{avec} \qquad w = \frac{u+v}{2}.$$



Méthode de Simpson

Interpolation de Lagrange : il existe une unique fonction polynomiale $\tilde{f}$ de degré $\leqslant 2$ tel que :

$$\tilde{f}(u) = f(u), \quad \tilde{f}(v) = f(v), \quad \tilde{f}(w) = f(w) \qquad \text{avec} \qquad w = \frac{u+v}{2}.$$

La méthode de Simpson consiste à approcher $\displaystyle\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\int_u^v \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_0 f(u) + \alpha_1 f(w) + \alpha_2 f(v) = I_{u,v}^2(f).$$

Méthode de Simpson

Interpolation de Lagrange : il existe une unique fonction polynomiale $\tilde{f}$ de degré $\leqslant 2$ tel que :

$$\tilde{f}(u) = f(u), \quad \tilde{f}(v) = f(v), \quad \tilde{f}(w) = f(w) \qquad \text{avec} \qquad w = \frac{u+v}{2}.$$

La méthode de Simpson consiste à approcher $\displaystyle\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\int_u^v \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_0 f(u) + \alpha_1 f(w) + \alpha_2 f(v) = I^2_{u,v}(f).$$

En appliquant cette formule à trois polynômes de degré $\leqslant 2$ on calcule :

$$I^2_{u,v}(f) = \frac{1}{6}(v-u)f(u) + \frac{4}{6}(v-u)f(w) + \frac{1}{6}(v-u)f(v).$$

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u, v]$.

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u,v]$.

La méthode de Simpson est à l'évidence de degré 2. Pour montrer qu'elle est de degré 3, il suffit par linéarité de le vérifier pour un seul polynôme de degré 3, par exemple $f(x) = (x-u)^3$:

$$I_{u,v}(f) = \int_u^v (t-u)^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}(v-u)^4$$

$$\text{et} \quad I^2_{u,v}(f) = \frac{v-u}{6} f(u) + \frac{4(v-u)}{6} f(w) + \frac{v-u}{6} f(v)$$

$$= 0 + \frac{1}{12}(v-u)^4 + \frac{1}{6}(v-u)^4 = \frac{1}{4}(v-u)^4.$$

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v (f(t) - \tilde{f}(t))\,\mathrm{d}t = \int_u^v (f(t) - p(t))\,\mathrm{d}t.$$

où p de degré $\leqslant 3$ vérifie : $p(u) = f(u)$, $p(v) = f(v)$, $p(w) = f(w)$ et $p'(w) = f'(w)$.

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u, v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v \big(f(t) - \tilde{f}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_u^v \big(f(t) - p(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

où p de degré $\leqslant 3$ vérifie : $p(u) = f(u)$, $p(v) = f(v)$, $p(w) = f(w)$ et $p'(w) = f'(w)$.

Considérons $g : x \mapsto f(x) - p(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)(x-w)^2}{24}$, avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(u) = g(v) = g(w) = g(t) = 0$ donc (Rolle) g' possède trois racines.
De plus, w est encore racine de g' donc g' possède au moins quatre racines.

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v \big(f(t) - \tilde{f}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_u^v \big(f(t) - p(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

où p de degré $\leqslant 3$ vérifie : $p(u) = f(u)$, $p(v) = f(v)$, $p(w) = f(w)$ et $p'(w) = f'(w)$.

Considérons $g : x \mapsto f(x) - p(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)(x-w)^2}{24}$, avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(u) = g(v) = g(w) = g(t) = 0$ donc (Rolle) g' possède trois racines.
De plus, w est encore racine de g' donc g' possède au moins quatre racines.
Par application successives du théorème de Rolle, g'' possède au moins trois racines, $g^{(3)}$ au moins deux racines et $g^{(4)}$ au moins une racine $c \in]u,v[$.

Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est d'ordre 3, et si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature vérifie : $|E_{u,v}(f)| \leqslant M_4 \dfrac{(v-u)^5}{2880}$ où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[u,v]$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de quadrature est égale à :

$$E_{u,v}(f) = \int_u^v (f(t) - \tilde{f}(t))\,\mathrm{d}t = \int_u^v (f(t) - p(t))\,\mathrm{d}t.$$

où p de degré $\leqslant 3$ vérifie : $p(u) = f(u)$, $p(v) = f(v)$, $p(w) = f(w)$ et $p'(w) = f'(w)$.

Considérons $g : x \mapsto f(x) - p(x) - K\dfrac{(x-v)(x-u)(x-w)^2}{24}$, avec K tel que $g(t) = 0$.
$g(u) = g(v) = g(w) = g(t) = 0$ donc (Rolle) g' possède trois racines.
De plus, w est encore racine de g' donc g' possède au moins quatre racines.
Par application successives du théorème de Rolle, g'' possède au moins trois racines, $g^{(3)}$ au moins deux racines et $g^{(4)}$ au moins une racine $c \in]u,v[$.
Sachant que $g^{(4)}(c) = f^{(4)}(c) - K$ on en déduit que $K = f^{(4)}(c)$ et :

$$g(t) = 0 \iff f(t) - p(t) = f^{(4)}(c)\frac{(t-v)(t-u)(t-w)^2}{24}.$$

Méthode de SIMPSON

Méthode composite

Elle consiste à appliquer la méthode de SIMPSON à une subdivision de pas régulier de $[a, b]$, ce qui revient à approcher $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}f(u_k) + \frac{4}{6}f\left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2}\right) + \frac{1}{6}f(u_{k+1})\right).}$$

Méthode de Simpson

Méthode composite

Elle consiste à appliquer la méthode de Simpson à une subdivision de pas régulier de $[a,b]$, ce qui revient à approcher $I(f)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}f(u_k)+\frac{4}{6}f\left(\frac{u_k+u_{k+1}}{2}\right)+\frac{1}{6}f(u_{k+1})\right).}$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^4$, l'erreur de la méthode de Simpson composite vérifie :

$$|\mathscr{E}_n(f)|\leqslant M_4\frac{(b-a)^5}{2280n^4}$$

où M_4 majore $|f^{(4)}|$ sur $[a,b]$.

Méthodes de Newton-Côtes

Les méthodes de Newton-Côtes sont basées sur l'interpolation de Lagrange à nœuds équirépartis dans l'intervalle $[u, v]$. On distingue :

- les formules fermées pour lesquelles les extrémités de $[u, v]$ font partie des nœuds (méthodes du trapèze et de Simpson) ;
- les formules ouvertes pour lesquelles les extrémités de l'intervalle ne font pas partie des nœuds (méthode du point milieu).

On peut montrer que ces méthodes à $p+1$ nœuds sont :

- d'ordre p lorsque p est impair ;
- d'ordre $p+1$ lorsque p est pair.

Méthodes de Newton-Côtes

Les méthodes de Newton-Côtes sont basées sur l'interpolation de Lagrange à nœuds équirépartis dans l'intervalle $[u, v]$. On distingue :

- les formules fermées pour lesquelles les extrémités de $[u, v]$ font partie des nœuds (méthodes du trapèze et de Simpson) ;
- les formules ouvertes pour lesquelles les extrémités de l'intervalle ne font pas partie des nœuds (méthode du point milieu).

On peut montrer que ces méthodes à $p + 1$ nœuds sont :

- d'ordre p lorsque p est impair ;
- d'ordre $p + 1$ lorsque p est pair.

Pour $p = 4$ on obtient la méthode de Villarceau ; pour $p = 6$ la méthode de Hardy. En pratique, les gains théoriques de ces méthodes sont compensés par l'augmentation des incertitudes sur les calculs.

Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss utilisent une subdivision particulière de $[u, v]$ où les points x_i sont racines d'une certaine famille de polynômes et ne sont pas régulièrement espacés. Ce sont des méthodes d'ordre $2p + 1$.

Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss utilisent une subdivision particulière de $[u,v]$ où les points x_i sont racines d'une certaine famille de polynômes et ne sont pas régulièrement espacés. Ce sont des méthodes d'ordre $2p+1$.

La fonction quad du module scipy.integrate :
elle renvoie un tuple (I,e) où I est une valeur approchée de l'intégrale $I(f)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et e une estimation de l'erreur $|I(f)-I|$.

Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss utilisent une subdivision particulière de $[u, v]$ où les points x_i sont racines d'une certaine famille de polynômes et ne sont pas régulièrement espacés. Ce sont des méthodes d'ordre $2p+1$.

La fonction quad du module scipy.integrate :
elle renvoie un tuple (I, e) où I est une valeur approchée de l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et e une estimation de l'erreur $|I(f) - I|$.

```
>>> import numpy as np
>>> from scipy.integrate import quad

>>> quad(lambda x: np.sin(x), 0, np.pi)
(2.0, 2.220446049250313e-14)

>>> quad(lambda x: np.exp(-x*x), -np.inf, np.inf)
(1.7724538509055159, 1.4202636780944923e-08)
```

On a $\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.